

Définition 1.11*Matrices ligne-équivalentes*

On dira que deux matrices sont ligne-équivalentes si elles peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On notera alors, pour deux matrices A et B équivalentes : $A \sim B$.

Remarque importante 1.12

De manière évidente, deux matrices ligne-équivalentes correspondent à deux systèmes équivalents.

Pour résoudre un système, on va donc « oublier » le système, et travailler sur sa matrice augmentée. On va échelonner la matrice, comme décrit dans la section suivante.

Remarque 1.13. *Attention!* On parle bien d'opérations sur les lignes de la matrice, pas sur les colonnes! Les solutions du système ne varient pas après des opérations **sur les lignes**.

1.4.2 Matrices échelonnées-réduites**Définition 1.14***Matrice échelonnée*

1. Le coefficient principal de la i -ème ligne est, s'il y en a un, le premier coefficient non nul sur cette ligne, en partant de la gauche.
2. Une matrice est échelonnée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
 - (a) Les lignes nulles (si elles existent) sont regroupées en bas de la matrice.
 - (b) Si elle possède des lignes non-nulles, alors le coefficient principal de chacune de ces lignes se trouve strictement à droite de celui de la ligne de dessus.

$$\begin{array}{l}
 \text{coefficients principaux} \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 \otimes & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & \otimes & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \text{escalier des coefficients principaux} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{lignes de 0}
 \end{array}$$

Exemples. Les matrices suivantes sont échelonnées :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Théorème 1.15

Toute matrice est ligne-équivalente à une matrice échelonnée.

Démonstration. Admis. □

Exemple.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour avoir un coefficient principal qui} \\ \text{vaut 1 tout à gauche sur la première} \\ \text{ligne}$$

$$\underset{\sim}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{il doit y avoir des 0 sous le coefficient} \\ \text{principal de la première ligne, pour} \\ \text{que les coefficients principaux des} \\ \text{lignes inférieures soient strictement à} \\ \text{sa droite}$$

$$\underset{\sim}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{de même, le coefficient principal de la} \\ \text{troisième ligne doit être strictement à} \\ \text{droite de celui de la deuxième}$$

La matrice est échelonnée.

On a donc l'équivalence des systèmes :

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Et on sait donc que ce système n'a pas de solution.

La notation matricielle simplifie l'écriture et rend la résolution des systèmes linéaires plus efficace. Mais les matrices, qui sont au cœur de l'algèbre linéaire, permettent d'aller bien au-delà de cette simple application.

Remarque importante 1.16

La matrice échelonnée dépend du choix des opérations élémentaires. Nous aurions pu, par exemple, échelonner de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \sim \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & \\
 & \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow 2L_2 \\ \sim \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & \\
 & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \sim \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & \\
 & \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \sim \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Définition 1.17*Matrice échelonnée-réduite*

Une matrice est échelonnée-réduite si :

1. elle est échelonnée,
2. les coefficients principaux valent 1,
3. les coefficients principaux sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

coefficients principaux

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 \textcircled{1} & * & 0 & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & * & 0 & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]$$

lignes de 0

Exemples. Les matrices suivantes sont échelonnées réduites

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées réduites

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 1.18. Les logiciels de calcul matriciel utilisent souvent l'abréviation *RREF* (*Reduced Row Echelon Form*) pour désigner la forme échelonnée réduite d'une matrice.

Contrairement aux matrices échelonnées, il y a unicité des matrices échelonnées-réduites :

Théorème 1.19

Toute matrice est ligne-équivalente à une unique matrice échelonnée-réduite.

Démonstration. Admis. □

Dès qu'une matrice est mise sous forme échelonnée, les opérations nécessaires pour obtenir une matrice échelonnée-réduite ne déplacent pas la position des coefficients principaux. Comme la forme échelonnée-réduite est unique, cela signifie que, quelle que soit la manière dont on a échelonné la matrice au départ, les coefficients principaux apparaissent toujours aux mêmes positions : celles de la matrice échelonnée-réduite.

Définition 1.20

Pivot

On appelle position de pivot d'une matrice A l'emplacement dans A correspondant à un coefficient principal (égal à 1) de la forme échelonnée réduite de A .

On appelle colonne pivot une colonne de A contenant une position de pivot.

Dans une forme échelonnée-réduite, les coefficients principaux (égaux à 1) sont appelés pivots.

Exemple.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{5} & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{6} & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} & -2 \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑
colonnes pivot

Exemples. Réduisons la matrice échelonnée précédemment.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{vu précédemment}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftrightarrow \frac{-1}{2}L_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{le coefficient principal de la troisième ligne doit valoir 1}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{il doit être le seul coefficient non-nul de sa colonne}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{idem}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{le coefficient principal de la deuxième ligne doit valoir 1}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{il doit être le seul coefficient non-nul de sa colonne}$$

1.5 L'algorithme de Gauss-Jordan

Pour réduire puis échelonner efficacement une matrice, on peut appliquer successivement les quatre étapes suivantes. La cinquième étape permet ensuite de réduire la matrice échelonnée.

1. On considère la colonne non nulle la plus à gauche. C'est une colonne pivot. La position de pivot est en haut de cette colonne.
2. On choisit comme pivot un élément non nul de la colonne pivot. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément à la position pivot.
3. On fait apparaître des 0 à toutes les positions situées sous le pivot à l'aide d'opérations élémentaires.
4. On ignore la ligne contenant la position de pivot (et, éventuellement, toutes les lignes au-dessus d'elle), et on applique les trois premières étapes à la sous-matrice restante. On répète ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune ligne non nulle à modifier.
5. On fait apparaître des 0 au-dessus de chaque pivot, en commençant par le pivot le plus à droite et en progressant vers le haut et vers la gauche. Si un coefficient principal est différent de 1, on divise sa ligne par sa valeur pour obtenir la valeur 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

La première colonne est non nulle. Le coefficient en haut à gauche est une position de pivot (pour faciliter les calculs suivants, on veut 1 en position de pivot, $L_1 \leftrightarrow L_4$ fonctionne aussi).

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -36 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la première colonne

$$\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -36 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la première colonne

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -36 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la deuxième colonne

$$\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -36 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 29 \end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la deuxième colonne

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 29 \end{bmatrix}$$

On ignore la première ligne. La deuxième colonne est déjà bonne. On divise par 2 la deuxième ligne pour avoir 1 comme coefficient principal (on le fait maintenant pour simplifier les calculs suivants).

$$\begin{array}{l} L_4 \leftarrow 3L_4 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & 87 \end{bmatrix}$$

On ignore les deux premières lignes. La troisième colonne est une colonne pivot. On prépare la prochaine étape qui consistera à mettre 0 sur la quatrième ligne, troisième colonne.

$$\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 49 \end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la troisième colonne

$$\begin{array}{l} L_4 \leftarrow \frac{1}{7}L_4 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Le pivot de la quatrième colonne doit valoir 1. Pour l'instant, on garde le coefficient principal de la troisième ligne à 9 pour ne pas complexifier les calculs à venir avec des fractions.

À ce stade, la matrice est échelonnée. On va terminer de la réduire, en « remontant » pour avoir des 0 et des 1 partout où c'est nécessaire.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{L_3 \leftarrow L_3 + L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{On veut des 0 au-dessus du pivot de la quatrième colonne}$$

$$\xrightarrow[\sim]{L_2 \leftarrow L_2 - L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{On veut des 0 au-dessus du pivot de la quatrième colonne}$$

$$\xrightarrow[\sim]{L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Le coefficient principal doit valoir 1.} \\ \text{Cela nous permettra de réduire plus} \\ \text{simplement sur la troisième colonne} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\sim]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{On veut des 0 au-dessus du pivot de la troisième colonne}$$

$$\xrightarrow[\sim]{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{On veut des 0 au-dessus du pivot de la troisième colonne}$$

La matrice est maintenant échelonnée-réduite.

Revenons au système :

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_3 & = & 16 \\ 5x_1 + & 2x_2 + & x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ & 2x_2 + & 5x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + & 2x_2 & & + & 4x_4 & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -15 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 7 \end{cases}$$

Cette méthode permet une résolution efficace d'un système. On verra par la suite qu'elle apporte aussi beaucoup d'informations utiles.

Théorème 1.21

Un système d'équations linéaires est compatible si et seulement si la colonne de droite (second membre) de sa matrice augmentée échelonnée-réduite n'est pas une colonne pivot. C'est-à-dire qu'il n'y a aucune ligne de la forme $[0 \ \dots \ 0 \ 1]$.

Rappel Dans ce cas, il y a une seule ou une infinité de solutions.

Exemples. Les matrices augmentées suivantes correspondent à des systèmes compatibles :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice suivante correspond à un système qui n'a pas de solution :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6 Variables de base et variables libres

Nous allons maintenant nous pencher sur les systèmes compatibles, sur l'unicité ou non des solutions, et comment exprimer les solutions quand il y en a une infinité.

Définition 1.22

Variables de base, variables libres

On appelle variables de base, ou variables liées, les variables qui correspondent aux colonnes pivot. Les autres sont appelées variables libres.

Théorème 1.23

Un système admet une unique solution si toutes les variables sont des variables de base et il admet une infinité de solutions s'il y a une variable libre au moins.

En général, quand on notera l'ensemble des solutions d'un système à une infinité de solutions, on notera les variables libres avec les lettres t, s, u, v .

Exemples. — $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ x_2 est une variable libre. $x_1 = 3, x_3 = 1, x_4 = 1$. L'ensemble

des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(3, t, 1, 1), t \in \mathbb{R}\}$.

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ x_3 est une variable libre. $x_1 + x_3 = 3, x_2 + 2x_3 = 1, x_4 = 2$. On note

$x_3 = t$ et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(3 - t, 1 - 2t, t, 2), t \in \mathbb{R}\}$.

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ x_3 et x_4 sont des variables libres. $x_1 + x_3 + x_4 = 1$ et $x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

$\mathcal{S} = \{(1 - s - t, -s - t, t, s) | s, t \in \mathbb{R}\}$

Les matrices suivantes sont des matrices augmentées de systèmes à une infinité de solutions :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes sont des matrices augmentées de systèmes à une unique solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

1.7 Systèmes homogènes

Définition 1.24

Système homogène

Un système est dit homogène si tous les termes du second membre sont nuls.

Exemple.
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème 1.25

Un système homogène est toujours compatible.

Démonstration. Le second membre ne peut pas être une colonne pivot. □

Remarque importante 1.26

Attention ! Si l'on précise que la matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ est la matrice d'un système

homogène, alors la dernière colonne de la matrice ne correspond pas au second membre.

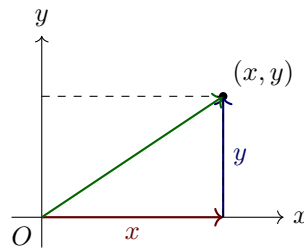
Par exemple, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ est la matrice augmentée du système **homogène** suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

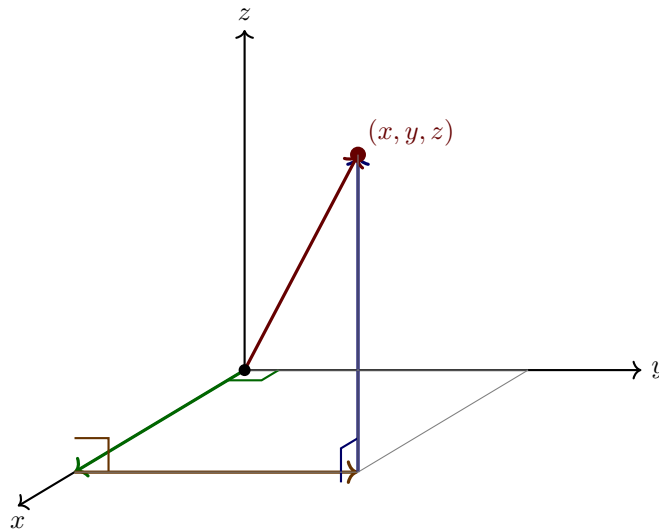
2 Vecteurs de \mathbb{R}^n

2.1 Vecteurs dans le plan et l'espace

Dans un repère (Oxy) , un point est de coordonnées (x, y) s'il faut se déplacer de x dans la direction de l'axe horizontal, puis de y dans la direction de l'axe vertical pour atteindre ce point **depuis l'origine O** .



De même, en dimension 3, pour atteindre le point de coordonnées (x, y, z) **en partant de l'origine**, il faut se déplacer de x dans la direction de l'axe (Ox) , puis de y dans la direction de l'axe (Oy) , puis de z dans la direction de l'axe (Oz) .



Dans ces deux cas, les coordonnées d'un point désignent implicitement un déplacement de l'origine vers ce point. Il est donc naturel de noter un point comme ce déplacement, et d'interpréter cet ensemble ordonné de nombres comme un vecteur. Dans ce cas, on notera plutôt les coordonnées avec une matrice colonne.

Définition 2.1*Vecteur de \mathbb{R}^n*

En algèbre linéaire, \mathbb{R}^n sera vu comme un ensemble de vecteurs, exprimés sous forme de matrice colonne.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

On appelle composantes de \vec{u} les u_i .

$$\text{On note } \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \mid u_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Définition 2.2*Égalité de vecteurs*

Deux vecteurs sont égaux si les deux propriétés suivantes sont vraies.

1. ils ont le même nombre de composantes
2. les composantes correspondantes sont identiques.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \iff u_i = v_i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

Exemples.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Définition 2.3*Vecteur nul*

Le vecteur nul de \mathbb{R}^n est le vecteur à n composantes dont toutes les composantes sont nulles.

$$\vec{0}_n = \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} n \text{ composantes.}$$

Remarque importante 2.4

Chaque colonne d'une matrice $m \times n$ est un vecteur de \mathbb{R}^m . On pourra noter

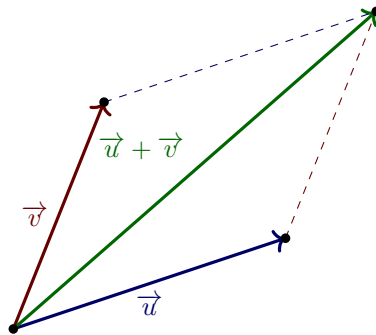
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \vec{a}_n] \text{ où } \vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \text{ est la } i\text{-ème colonne de } A.$$

2.2 Opérations sur \mathbb{R}^n **2.2.1 Addition de deux vecteurs**

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la somme de ces vecteurs est obtenue en additionnant les composantes correspondantes :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

- Remarques 2.5.**
1. Attention ! Cela n'a pas de sens d'additionner deux vecteurs de dimensions différentes.
 2. Cette opération est naturelle, car on a interprété un vecteur comme un déplacement depuis l'origine. La figure suivante illustre cela.



Exemples. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 + 1 \\ -1 + 4 \\ 3 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

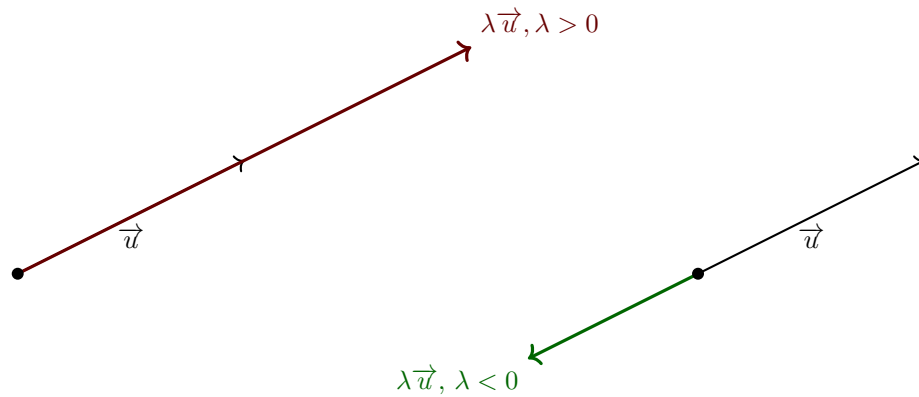
Pour tout vecteur \vec{u} , $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ et $-\vec{u}$ est l'opposé de \vec{u} .

2.2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le produit de λ par \vec{u} est obtenu en multipliant chaque

composante de \vec{u} par λ . $\lambda \vec{u} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix}$.

Exemple. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\lambda = -3$ $\lambda \vec{u} = -3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$



Pour simplifier, on notera $\vec{u} + (-1)\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$.

2.2.3 Propriétés des opérations sur \mathbb{R}^n

Propriété 2.6

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

Commutativité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Associativité 1 $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Distributivité 1 $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Distributivité 2 $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Associativité 2 $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$

2.3 Combinaisons linéaires

Définition 2.7

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Autrement dit, ils ont la même direction, ils sont portés par la même droite.

Exemples. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ est colinéaire à $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Remarque 2.8. 0 est colinéaire à tous les vecteurs.

Définition 2.9

Combinaison linéaire

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ des vecteurs de \mathbb{R}^n , et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des scalaires. Alors, le vecteur

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 2.10. Un ou plusieurs λ_i peuvent être nuls.

Exemple. 1.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$$

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

2. Est-il possible d'écrire $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ?

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \\ 6\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Autrement dit, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 si et seulement s'il existe λ_1 et

λ_2 tels que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'après ce que l'on a dit sur les égalités de vecteurs, c'est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$, ce qui prouve que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Dans cet exemple, on a résolu une équation vectorielle. Voyons cela plus généralement dans la section suivante.

2.4 Équations vectorielles

Définition 2.11

Équation vectorielle

Une équation vectorielle a pour inconnues des réels et pour coefficients des vecteurs :

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_m \vec{v}_m = \vec{b}$$

Elle a le même ensemble de solutions que le système dont la matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m & \vec{b} \end{array} \right]$$

où chaque colonne est un vecteur.

Remarque 2.12. \vec{b} peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ si et seulement si l'équation vectorielle admet une solution.

2.5 Génération linéaire

Définition 2.13

Espace vectoriel engendré

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ est noté $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ et il est appelé sous-espace de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$. Autrement dit, $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Remarques 2.14. 1. Dire que \vec{b} appartient à $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ revient à dire que la matrice $\left[\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_m & \vec{b} \end{array} \right]$ a au moins une solution.

2. Il y a une infinité de vecteurs dans un ensemble engendré par des vecteurs non tous nuls.

3. $\text{Vect}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$

4. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, alors $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$. Donc $\vec{0} \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.

5. $\text{Vect}(\vec{v})$ est la droite engendrée par \vec{v} . C'est la droite qui porte \vec{v} .

6. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ ne sont pas colinéaires, alors $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathbb{R}^2$

7. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ ne sont pas colinéaires, alors $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est un plan dans \mathbb{R}^n passant par l'origine.

8. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ sont colinéaires, alors $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une droite dans \mathbb{R}^n passant par l'origine.